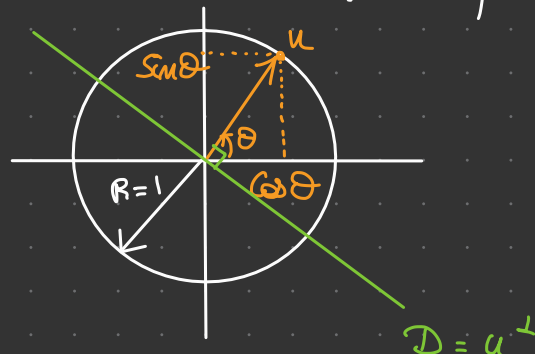


Exercice 1

1a) Une b.o.n. de $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une base (u, v) de \mathbb{R}^2 tq $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\langle u, v \rangle = 0$.

Tout vecteur de norme 1 de \mathbb{R}^2 se met sous la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

C'est le cas pour u , et on a un θ tq $u = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, et θ est unique mod. 2π .



Maintenant, v est un vecteur unitaire de la droite $\mathcal{D} = u^\perp$. \mathcal{D} est dirigée (entre autre !) par le vecteur $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, qui est également $\|v_0\| = 1$.

Comme $v \in \mathcal{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda v_0$, et $\|v\| = |\lambda| \|v_0\| = |\lambda| = 1$, d'où $\lambda \in \{1, -1\}$.

Ainsi, on a nécessairement $v = v_0$ ou $-v_0$, et inversement (u, v_0) et $(u, -v_0)$ sont des b.o.n. de \mathbb{R}^2 .

PCL: Les b.o.n. de \mathbb{R}^2 sont les :

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right), \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et}$$

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right), \theta \in \mathbb{R} \right\}$$



1b) Soit (u, v) une base de \mathbb{R}^2 . Notons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, (u, v) est orthonormée ssi

$$(O.N.) \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ vérifie

$${}^t \mathcal{U} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 & v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi ${}^t \mathcal{U} \mathcal{U} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalent à (O.N.)

i.e. $\mathcal{U} \in O_2(\mathbb{R}) \iff (u, v)$ est orthonormée.

Struct. de gp sur $O_2(\mathbb{R})$: cf. cours.

1.c. Soit (u, v) une b.o.n. de \mathbb{R}^2 . Notons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ comme avant. On a alors

$$\det_{b.c.} (u, v) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}_{= \mathcal{U}}$$

On sait que $\mathcal{U} \in O_2(\mathbb{R})$, soit ${}^t \mathcal{U} \mathcal{U} = I_2$.

D'où $\det({}^t \mathcal{U} \mathcal{U}) = (\det \mathcal{U})^2 = \det(I_2) = 1$.

D'où $\det_{b.c.} (u, v) \in \{-1, 1\}$.

1.d) D'après la 1.a), une bon est de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right) \quad \text{ou} \quad \left(\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\det_{b.c} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

↳ directe

$$\det_{b.c} = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1.$$

↳ indirecte

Identifions $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ de la façon usuelle. Alors, le cercle unité s'identifie aux nombres complexes de module = 1 : $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \}$.

Soit $\Phi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \{ \text{b.o.m.d. de } \mathbb{R}^2 \}$

$$e^{i\theta} \longmapsto \left(\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right)$$

Φ est bien définie car $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si $\theta = \theta' + 2\pi k$ et \cos, \sin sont 2π -périodiques.

Elle est surjective d'après ce que l'on vient de dire.

Elle est injective car si $\Phi(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta'})$, alors en considérant la 1^{ère} colonne, on a $\begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases}$ soit $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.

Φ est donc bijective.

1.e. L'ensemble des b.o.m.d. de \mathbb{R}^2 s'identifie à

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{ M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}.$$

$SO_2(\mathbb{R})$ est un sous-gp. de $O_2(\mathbb{R})$ car c'est

le noyau du morphisme $\det|_{O_2(\mathbb{R})} : O_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \{ \pm 1 \}$.

D'après 1.d), $SO_2(\mathbb{R})$ s'identifie au cercle unité \mathbb{S}^1 ,

et ce dernier hérite donc d'une structure de groupe, telle que l'identification soit un isomorphisme de groupes.

Bien sûr, cette structure est la même que la structure multiplicative sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Pour le voir, en notant $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, on calcule

$$\begin{aligned} R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}$$

d'après les formules de trigonométrie.

Exercice 4 :

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$$4. \text{ On pose } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

4.a. Montrer que R est une matrice orthogonale.

a. On vérifie que les colonnes sont :

1) normées

2) deux à deux orthogonales.

$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|C_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|C_3\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$\hookrightarrow \langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\langle C_1, C_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.$$

$$\langle C_2, C_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0. \quad \text{OK.}$$

Ainsi, $R \in O_3(\mathbb{R})$.

b) On calcule le polynôme caractéristique de R :

$$\chi_R(x) \quad \parallel \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\det(R - xI_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -x \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad = (1-x) \left(x^2 + \frac{1}{4} \right).$$

Ainsi, R a trois v.a.p complexes distinctes 2 à 2:

Deux racines complexes conjuguées, non réelles

(à savoir $\pm \frac{i}{2}$)

$$S_{\mathbb{C}}(R) = \left\{ 1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \right\}.$$

$\chi_R(x)$ est scindé, à racines simples (sur \mathbb{C}),

donc R est diagonalisable sur \mathbb{C} , semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$.
 Donc, R n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

4.c. Montrer que $D = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique espace propre réel de R .

On a vu que 1 est vap de R . D'où :

$E_1^{\mathbb{R}}(R) := \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid RX = X \} \neq \{0\}$. C'est l'unique espace propre réel.
 On précise le corps de l'espace propre.

Comme R a 3 v.a.p. complexes, les espaces propres complexes associés sont nécessairement de $\dim_{\mathbb{C}} = 1$.

Vérifions que $\dim_{\mathbb{R}} E_1^{\mathbb{R}}(R) = 1$:

Soient $X, Y \in E_1^{\mathbb{R}}(R)$. Alors comme $X, Y \in E_1^{\mathbb{C}}(R)$, ils sont colinéaires sur \mathbb{C} : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \lambda X + \mu Y &= 0 & \text{D'où en conjuguant :} \\ + \bar{\lambda} X + \bar{\mu} Y &= 0 & \text{car } X, Y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\underbrace{(\lambda + \bar{\lambda})}_{\in \mathbb{R}} X + \underbrace{(\mu + \bar{\mu})}_{\in \mathbb{R}} Y = 0 \quad (*)$$

Cas 1 : $\lambda + \bar{\lambda} = \mu + \bar{\mu} = 0$. Alors $\lambda, \mu \in i\mathbb{R}$. D'où

$\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tq $\lambda = i\lambda', \mu = i\mu'$ avec $(\lambda', \mu') \neq (0, 0)$.

D'où $i \cdot (\lambda' X + \mu' Y) = 0$, et (X, Y) est liée sur \mathbb{R} .

Cas 2. $\lambda + \bar{\lambda}$ ou $\mu + \bar{\mu}$ est non nul. Alors dans ce cas, la relation (*) est non triviale, à coef. réels, montrant

que (X, Y) est liée sur \mathbb{R} .

Dans les deux cas, on voit bien que $\dim_{\mathbb{R}} E_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$.

Enfin, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

montrant que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. D'où $E_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathcal{D} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{D}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Comme $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = x + y$, l'équation de \mathcal{D}^{\perp} est $\{x + y = 0\}$.

Notons $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $\mathcal{D}^{\perp} = v_0^{\perp}$.

Soit $v \in \mathcal{D}^{\perp}$. Montrons que $R.v \in \mathcal{D}^{\perp}$, i.e. $\langle R.v, v_0 \rangle = 0$.

Or, comme $v_0 = R.v_0$, on a

$$\begin{aligned} \langle R.v, v_0 \rangle &= \langle R.v, R.v_0 \rangle \\ &= \langle v, v_0 \rangle, \text{ car } R \in O_3(\mathbb{R}). \\ &= 0, \text{ car } v \in v_0^{\perp}. \end{aligned}$$

Ainsi $R(v_0^{\perp}) \subset v_0^{\perp}$. Comme R est inversible, $\dim R.v_0^{\perp} = \dim v_0^{\perp}$, d'où $R.v_0^{\perp} = v_0^{\perp}$.

d)

4.d. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base orthonormée de \mathcal{D}^{\perp} .

Expliciter la matrice de la restriction $R : \mathcal{D}^{\perp} \rightarrow \mathcal{D}^{\perp}$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Commençons par calculer la norme et le produit scalaire de ces deux vecteurs : normes $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $0 + 1 = 1$: ok
 p.s. : $0 + 0 + 0 = 0$.

C'est bien une famille orthonormée.

Il suffit de voir que ses éléments sont dans D^\perp :
 l'équation de ce plan étant $x + y = 0$, la vérif. est immédiate.

C_1, C_2

e)

On pose $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

4.e. Montrer que le premier vecteur-colonne de $A(a, b, c)$ est de norme 1 si et seulement si $a^4 + (a^2 + 1)(b^2 + c^2) = 1$. Montrer que les deux premiers vecteurs-colonne de $A(a, b, c)$ sont orthogonaux si et seulement si $ab(a^2 + b^2 + c^2 - 1) = 0$.

$$\begin{aligned} \|C_1\|^2 &= a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2 \\ &= a^4 + a^2b^2 + 2abc + c^2 + a^2c^2 - 2abc + b^2 \\ &= a^4 + (a^2 + 1)(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_2 \rangle &= a^2(ab - c) + (ab + c)b^2 + (ac - b)(bc + a) \\ &= a^3b - a^2c + ab^3 + cb^2 + abc^2 + a^2c - b^2c - ab \\ &= ab(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \end{aligned}$$

f. 4.f. Retrouver la conclusion de 4.a en montrant que $R = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Il suffit de remplacer a, b et c par leurs valeurs $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 .

5. Les quatre matrices sont symétriques et réelles.

D'après le théorème spectral, elles sont toutes diagonalisables sur \mathbb{R} en base orthonormée.

Cas de C_1 :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pol. caractéristique: $\chi_{C_1}(X) = \det(C_1 - X I_2)$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 4$$
$$= (-X-1)(-X+3) = (X-3)(X+1).$$

D'où $S_{\mathbb{R}}(C_1) = \{3, -1\} \cup \{0\}$

$$E_3(C_1) = \text{Ker}(C_1 - 3I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On résout:
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \underline{2x_1 - 2x_2 = 0} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

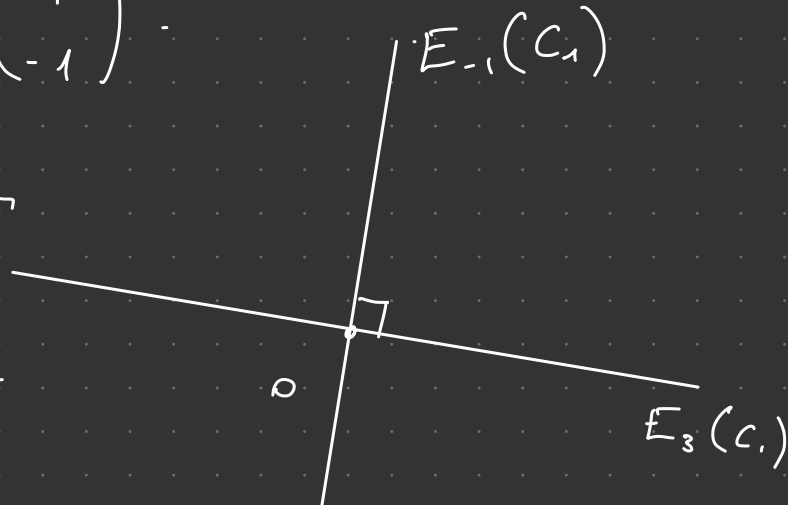
$$E_3(C_1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_{-1}(C_1) = \text{Ker}(C_1 + I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(C_1 + I_2) \text{ si } x_1 = -x_2.$$

$$E_{-1}(C_1) = \mathbb{R} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rem: Les espaces propres d'une matrice sym. réelle sont en somme directe **orthogonale**.



i on sait $E_3(C_1) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$E_{-1}(C_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(v_1, v_2) est une b.o.n. de v.e.p de C_1 .

$$C_1 = \tilde{P}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{P} \quad \tilde{P} \in O(2).$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}.$$

$$\tilde{P}^{-1} = {}^t \tilde{P}, \quad \text{car } \tilde{P} \in O(n) = \{ \tilde{P} \mid {}^t \tilde{P} \tilde{P} = I_n \}$$
$$= R_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$1) \text{ Vap : } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$$E_{-1}(C_2) = \text{Ker}(C_2 + I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2) \in E_{-1}(C_2)$$



$$\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0 & \Leftrightarrow \sqrt{2}x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \sqrt{6}x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(C_2 + I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} //$$

$$\text{Ker}(C_2 - 4I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \text{Ker}(C_2 + I_2)^\perp$$

$$\text{Posons : } v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(v_1, v_2) est un bon de rep.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned} \chi_{C_3}(X) &= (1-X)(-2-X) - 4 \\ &= X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3) \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}} C_3 = \{2, -3\}$$

$$(x_1, x_2) \in E_2(C_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{↗} (x-2) \\ \rightarrow \text{inutile} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$E_2(C_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2) \in E_{-3}(C_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{4x_1 + 2x_2 = 0} \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} 4 & 2 \\ e & 1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$$

Preons $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique vers la base de rep. normalisées.

$$\text{D'où } C_3 = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{On calcule } \chi = \chi_{C_1}$$

$$\chi(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -2 \\ -3 & 1-x & 2 \\ -2 & 2 & -3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-x & -2-x & 0 \\ -3 & 1-x & 2 \\ -2 & 2 & -3-x \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$\chi(x) = \begin{vmatrix} -2-x & 0 & 0 \\ -3 & 4-x & 2 \\ -2 & 4 & -3-x \end{vmatrix}$$

$$= (-2-x) \cdot \left[(4-x)(-3-x) - 8 \right]$$

$$= -(x+2) (x^2 - x - 12 - 8)$$

$$= -(X+2) \underbrace{(X^2 - X - 20)}_{(X+4)(X-5)}$$

Le spectre de C_4 est réel (comme attendu) :

$$S_{\mathbb{R}} C_4 = \{5, -2, -4\} : \text{cardinal} = \dim \mathbb{R}^3.$$

Donc les espaces propres associés sont des droites. On peut en voir à "l'œil nu", et cela suffirait. Sinon, on résout les systèmes $(C_4 - \lambda I_3) X = 0$, dont on sait qu'ils admettent un espace de sol. de dim 1.

$$\boxed{\lambda = 5} \quad \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

On va "pivoter" selon x_3 , ce qui revient juste à permuter les x_i .

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) & \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -7x_1 - 7x_2 = 0 \\ 14x_1 + 14x_2 = 0 \end{cases} & \begin{aligned} & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{aligned} \\ (x-2) \downarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) & \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ paramètre.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = -\lambda/2 \end{cases}$$

$$\underline{\text{CCL}} : E_5(C_4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$ On résout le système $(C_4 + 4I_3)X = 0$.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ \cancel{-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0} \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \downarrow (-1) \times \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3}x_1 - \cancel{3}x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$E_{-2}(C_4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -4$: On résout le système $(C_4 + 4I_3)x = 0$.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 & \begin{cases} x_1 + x_2 + 0 = 0 \\ x_1 + x_2 + 0 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 2x_1 - 2x_2 = 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } E_{-4}(C_4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi une b.o.n. de vap. de C_4 :

$$v_1 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{vap} = 5$$

$$\text{vap} = -2$$

$$\text{vap} = -4$$

Soit $P = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$ la matrice de passage de la base canonique vers (v_1, v_2, v_3) . Alors, $P \in O_3(\mathbb{R})$ et on a :

$$C_4 = \mathcal{P} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \\ \in \\ \in \end{matrix} \mathbb{P}$$

Exercice 8

8.a. $\forall q \quad O_n(\mathbb{Z}) = \{ M = (m_{ij}) \in O_n(\mathbb{R}) \mid m_{ij} \in \mathbb{Z} \}$
est un sous-gp. de $O_n(\mathbb{R})$.

(i) $O_n(\mathbb{Z})$ contient $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Soient $M, M' \in O_n(\mathbb{Z})$.

En notant m_{ij}, m'_{ij} les coef. de M, M' respectivement,
le coef. (i, j) du produit MM' est donné par :

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{m_{ik}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{m'_{kj}}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \quad \text{car } \mathbb{Z} \text{ est stable par somme et produit.}$$

D'où $M, M' \in O_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow MM' \in O_n(\mathbb{Z})$.

(iii) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, son inverse est $M^{-1} = {}^t M$.

Donc, si $M \in O_n(\mathbb{Z})$, alors $M^{-1} = {}^t M$ est à coef. entiers, i.e. $M \in O_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow M^{-1} \in O_n(\mathbb{Z})$.

CLL : $O_n(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$, stable par produit et passage à l'inverse. C'est donc un sous-gp. de $O_n(\mathbb{R})$.

8.b. On va dénombrer $O_n(\mathbb{Z})$.

Soient $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{Z}^n$ les colonnes d'une matrice

de $O_m(\mathbb{Z})$. Nécessairement, chaque C_i a exactement une coordonnée non nulle, et elle vaut ± 1 .
 En effet, si un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ est normé et a coef. $\in \mathbb{Z}$, alors $\underbrace{x_1^2}_{\in \mathbb{N}} + \dots + \underbrace{x_m^2}_{\in \mathbb{N}} = 1$.

Comme les x_i^2 sont ≥ 0 , entiers et que leur somme vaut 1, un, et un seul, d'entre eux vaut 1 et les autres sont nuls.

On dénombre :

- $2m$ possibilités pour C_1 (choix du x_i non nul, puis choix de son signe.)
- $2(m-1)$ possibilités pour C_2 , car $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ donc C_1 et C_2 ne peuvent pas avoir la même coordonnée non nulle $\Rightarrow (m-1)$ choix restant $\times 2$ signes possibles.
- ⋮
- 2 choix possibles pour C_m .

$$\text{Au final, } |O_m(\mathbb{Z})| = 2m \times 2(m-1) \times \dots \times 2 = 2^m \cdot m!$$

La restriction $\det|_{O_m(\mathbb{Z})}$ est un morphisme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, qui est surjectif car $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in O_m(\mathbb{Z})$ et son $\det = -1$.

Son noyau est $O_m(\mathbb{Z}) \cap SO_m(\mathbb{R})$, et par le thm de

LaGrange, on a : $|O_m(\mathbb{Z})| / |O_m(\mathbb{Z}) \cap SO_m(\mathbb{R})| = |\{\pm 1\}|$

$$\text{D'où } |O_m(\mathbb{Z}) \cap SO_m(\mathbb{R})| = \frac{1}{2} |O_m(\mathbb{Z})| = 2^{m-1} m!.$$

8.c. Soit $\mathcal{M} \in O_m(\mathbb{Z})$, de colonnes C_1, \dots, C_m .

On a vu que $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, C_j a un seul coef non-nul. Appelons-le $\sigma(j) \in \{1, \dots, m\}$.

Si (e_1, \dots, e_m) est la base canonique de \mathbb{R}^m , alors

par déf, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $\exists \varepsilon_j \in \{-1, 1\} \mid C_j = \varepsilon_j e_{\sigma(j)}$.

Maintenant, $\forall j, j' \in \{1, \dots, m\}$, si $\sigma(j) = \sigma(j')$, alors

$$\langle C_j, C_{j'} \rangle = \langle \varepsilon_j e_{\sigma(j)}, \varepsilon_{j'} e_{\sigma(j')} \rangle$$

$$= \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \langle e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(j')} \rangle$$

$$= 1 \text{ car } \sigma(j) = \sigma(j')$$

$$= \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \in \{1, -1\}.$$

Comme les colonnes sont 2 à 2 orthogonales, on a nécessairement

$j = j'$: σ est donc injective, donc bijective puisque

$$\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}.$$

Ainsi, σ est une permutation de $\{1, \dots, m\}$. Appelons

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_m \end{pmatrix}. \text{ Alors par déf, } \mathcal{M} = P_\sigma \cdot D, \text{ où}$$

P_σ est la matrice de la permutation σ .

8.d. La décomposition est unique si on fait le produit

dans l'ordre $P_\sigma \times D$. Si on ne tient pas compte de

l'ordre des facteurs, alors il n'y a pas unicité :

$n = 2$, $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Also $\sigma = \tau$ is
transposition $\tau: \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{matrix}$, $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is

$$\mathcal{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}'} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_\sigma}.$$

$$\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$$